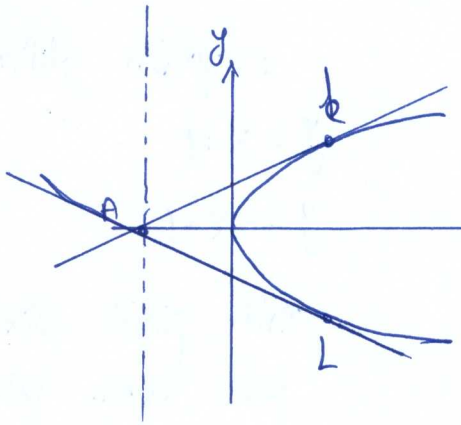
שאלה מספר 1

נתון: $y^2 = 2px$



א) נמצא משוואת משיק לפרבולה בנקודה שרירותית:

$$(x + x_0)p = y_0 \cdot y$$

משוואת המשיקים:
$$\begin{cases} (x + x_B)p = y_B \cdot y \\ (x + x_T)p = y_T \cdot y \end{cases}$$

בנקודה A מתקיים $y = 0$ ולכן:

$$(x + x_B)p = (x + x_T)p \rightarrow x + x_B = x + x_T \rightarrow x_B = x_T$$

ב) נמצא שיפועים של המשיקים/ישרים:

$$m_{\text{משיק ב-}B} = \frac{p}{y_B} \quad , \quad m_{\text{משיק ב-}T} = \frac{p}{y_T}$$

$$m_{\text{משיק ב-}B} \cdot m_{\text{משיק ב-}T} = \frac{p}{y_B} \cdot \frac{p}{y_T} = \frac{p^2}{y_B \cdot y_T}$$

מטעמי סימטריה $y_T = -y_B$ ולכן מכפלת השיפועים $-\frac{p^2}{y_B^2}$ מכאן נקבל כי שיעור המשוואת הפרבולה שמכפלת השיפועים: $-\frac{p}{x}$

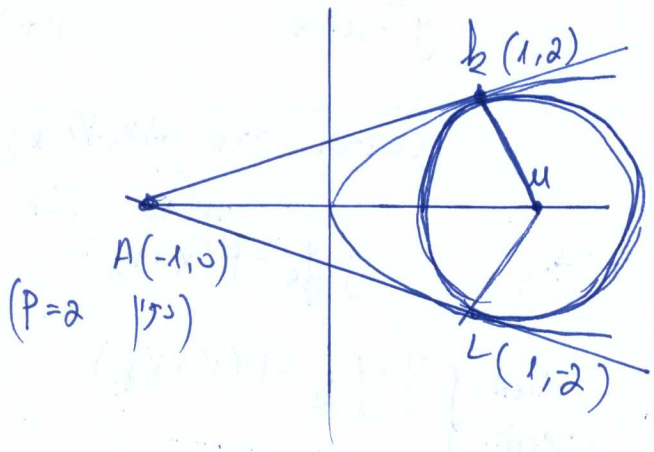
במידרג משיק $\frac{p}{2} = x$ ולכן:

$$-1 = -\frac{\frac{p}{2}}{x}$$

מכפלת השיפועים (-1) ולכן המשיקים ניצבים.

וואלה SCHOOL ללמוד באינטרנט | בגרות אונליין

⑦ נתון: $y^2 = 4x$



משוואת המשיקים:

$y = x + 1$

$y = -x + 1$

רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה ולכן

מרכז"ק:

$m_{KM} = -1$

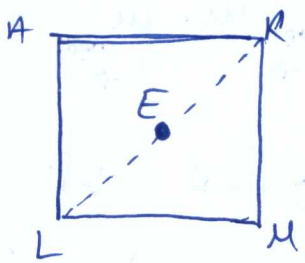
$$\frac{2-0}{1-x_M} = -1 \longrightarrow x_M = 3 \longrightarrow M(3,0)$$

רדיוס מרכז המעגל נתון:

$$d_{KM} = R = \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8}$$

ולכן משוואת המעגל: $(x-3)^2 + y^2 = 8$

⑧



מרכז המעגל במפגש האלכסונים:

$$E\left(\frac{1+1}{2}, \frac{2+(-2)}{2}\right) = (1,0)$$

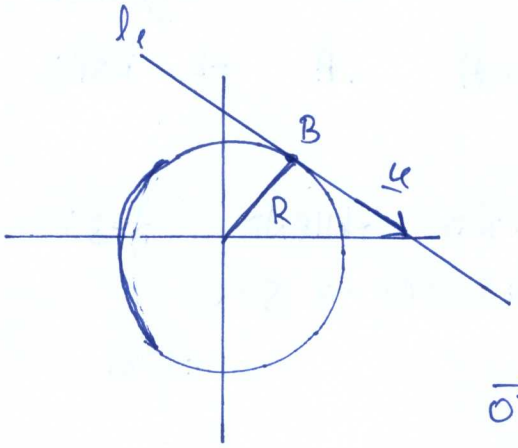
מרחק נקודה מישר:

$$d_{E \to y=x+1} = R = \frac{1+1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

ולכן $(x-1)^2 + y^2 = 2$

בגרות אונליין | וואלה SCHOOL ללמוד באינטרנט

שאלה מספר 2



(א) המשך הנתון קטן.

נקח כלשהי על ישר l_1:

$$B(2+t, 2+2t, t)$$

כדי שאנחנו למצוא נקודה

היא מקיימת.

$$\vec{OB} = (2+t, 2+2t, t)$$

וקטור כיוון של הישר - $\underline{u} = (1,2,1)$

$\vec{OB} \cdot \underline{u} = 0$: $(\vec{OB} \perp \underline{u})$

$$(2+t)\cdot 1 + (2+2t)\cdot 2 + t\cdot 1 = 0$$

$$2+t+4+4t+t=0$$

$$6t = -6 \rightarrow t = -1$$

ולכן:

$$B(1,0,-1)$$

(ב) 1) נתון:

$$l_2 : \underline{x} = (0,1,1) + s(2,-1,1)$$

נמצא משוואת מישור π.

הוקטור $\underline{u}$ והוקטור $\vec{OB}(1,0,-1)$ כורשים את מישור π ולכן וקטור הנורמל שלו מאונך להם.

$$\begin{cases} A\cdot 1 + B\cdot 2 + C\cdot 1 = 0 \\ A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot(-1) = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} A+2B+C=0 \\ A-C=0 \end{cases}$$

$$2C+2B=0 \quad (A=C)$$

$$C=-B$$

$$C=1 \rightarrow B=-1,\ A=1 \rightarrow \underline{n}_{\pi}(1,-1,1)$$

בגרות אונליין | וואלה SCHOOL ללמוד באינטרנט

המישור עובר בראשית הצירים ($D=0$) ולכן

משוואתו: $X - Y + Z = 0$.

נמצא את A. A - נקודה על הישר:

$A(2S, 1-S, 1+S)$

נציב במשוואת המישור:

$2S - (1-S) + 1 + S = 0 \rightarrow 4S = 0 \rightarrow S = 0$

ולכן:

$A(0, 1, 1)$

$|\vec{OA}| = \sqrt{0^2+1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$|\vec{OB}| = R = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

מכאן $R = |\vec{OA}|$ ולכן A נמצא על המעגל.

2)

$$S_{\Delta AOB} = \frac{|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cdot \sin(\alpha)}{2}$$

(α = הזווית בין הווקטורים $\vec{OA}$ ו- $\vec{OB}$)

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}|\,|\vec{OB}|} = \frac{1\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = 120^\circ$$

ולכן:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(120^\circ)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

או בקירוב 0.866.

בגרות אונליין | וואלה SCHOOL ללמוד באינטרנט

שאלה מספר 3

א) נתון: $z = \frac{\left(cis\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)^3}{\left(cis\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right)^2} =$

$= \frac{cis\left(\frac{\pi}{3}\right)}{cis\left(\frac{-\pi}{6}\right)} = cis\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

$|z| = 1 \quad , \quad \arg(z) = \frac{\pi}{2}$

ב) $\left(cis\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^n = \underbrace{\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)} + i\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

נדרוש שיתקיים כי נקבה מס
מיומנה טהורה ולכן:

$n \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \longrightarrow n = 1 + 2k \quad (1, 3, 5, 7, \ldots)$

שהיה n אי זוגי

ב) א) $\left|z + \bar{z} - w(z - \bar{z})\right| = 40$

נציב $z = x + iy$:

$\left|x + iy + x - iy - w(x + iy - x + iy)\right| = 40$

$|2x - 2wiy| = 40$

$4x^2 + 4w^2y^2 = 1600$

משוואת אליפסה קנונית.

בגרות אונליין | וואלה SCHOOL ללמוד באינטרנט

2) $12+8i$ מרחק מהראשית שווה ל-20.

$$4\cdot 12^2 + 4\cdot m^2\cdot 8^2 = 1600$$

$$m^2 = 4 \rightarrow m = \pm 2$$

$m > 1$ ולכן $m = 2$ ולכן משוואת האליפסה:

$$x^2 + 4y^2 = 400$$

חיתוך עם הצירים:

$y=0$: $x^2 = 400 \rightarrow x = \pm 20$

$(\pm 20, 0)$

$x=0$: $4y^2 = 400 \rightarrow y = \pm 10$

$(0, \pm 10)$

בגרות אונליין | וואלה SCHOOL ללמוד באינטרנט

שאלה מספר 4

נתון: $f(x)=9^x-2\cdot3^x-3$

א. 1) חיתוך עם ציר y:

$f(x=0)=9^0-2\cdot3^0-3=-4$

$(0,-4)$

חיתוך עם ציר x:

$0=9^x-2\cdot3^x-3$

$0=(3^x)^2-2\cdot3^x-3$

$t=3^x$: $t^2-2t-3=0$

$t_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot(-3)}}{2}=$

$=\frac{2\pm4}{2}\rightarrow t_1=3$, $t_2=-1$

$t=3$ נציב ב: $3^x=3$

$x=1$

ולכן $t>0$

ולכן $(1,0)$.

2) אסימפטוטה:

$\lim_{x\to\infty}(9^x-2\cdot3^x-3)=\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{9^x}_{\to0}-2\cdot\underbrace{3^x}_{\to0}-3)=-3$

$y=-3$ - אסימפטוטה אופקית.

בגרות אונליין | וואלה SCHOOL ללמוד באינטרנט

ב) נמצא את נקודות החיתוך עם ציר ה-x:

$$f(x) = -3$$

$$9^x - 2\cdot 3^x - 3 = -3$$

$$9^x - 2\cdot 3^x = 0$$

$$3^{2\cdot x} - 2\cdot 3^x = 0$$

$$3^x(3^x - 2) = 0$$

3^x יכול להיות 0.

$$3^x = 2 \quad /\ln$$

$$x\cdot\ln(3) = \ln(2)$$

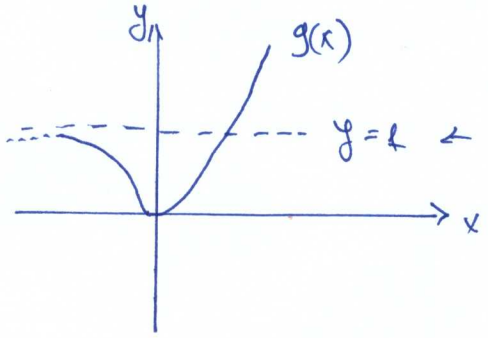
$$x = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$$

$$S = \int_0^{\frac{\ln(2)}{\ln(3)}} [(-3) - (9^x - 2\cdot 3^x - 3)]\,dx = \int (-9^x + 2\cdot 3^x)\,dx =$$

$$= -\frac{9^x}{\ln(9)} + 2\cdot\frac{3^x}{\ln(3)}\Big|_0^{\frac{\ln(2)}{\ln(3)}} = 1.82 - 1.36 = 0.46$$

יח"ר

ג) $g(x)$ היא הגבה של $f(x)$ ב 4 יח' למעלה.



אסימפטוטה אופקית

שזה גבוה ב 4 יח' נקודת קיצון ב $x=1$.

בגרות אונליין
וואלה SCHOOL ללמוד באינטרנט

שאלה מספר 5

א) נקודות קיצון של $f(x)$ הן נקודות בהן $f'(x)$ מתאפסת, כלומר $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=5$.

בטבלת סימנים נקבל:

x		-2		2		5	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
גרף $f(x)$	↘	min	↗	max	↘	min	↗

ולכן $x=-2$ ו- $x=5$ - מינימום.

$x=2$ - מקסימום.

ב) 1) $g(x)=\ln(f(x))$

נקודות שבהן $f(x)>0$, לפי הסרטוט: $x<2$ או $x>(-2)$.

2) אסימפטוטות אנכיות הן: $x=\pm 2$

3) $g'(x)=\frac{1\cdot f(x)}{f'(x)}$

$g'(x)=0$: $f(x)=0$: $x=4$

($x=-1$ - אחרת לא היה)

בטבלת סימנים נראה ש: $x=4$ -> max

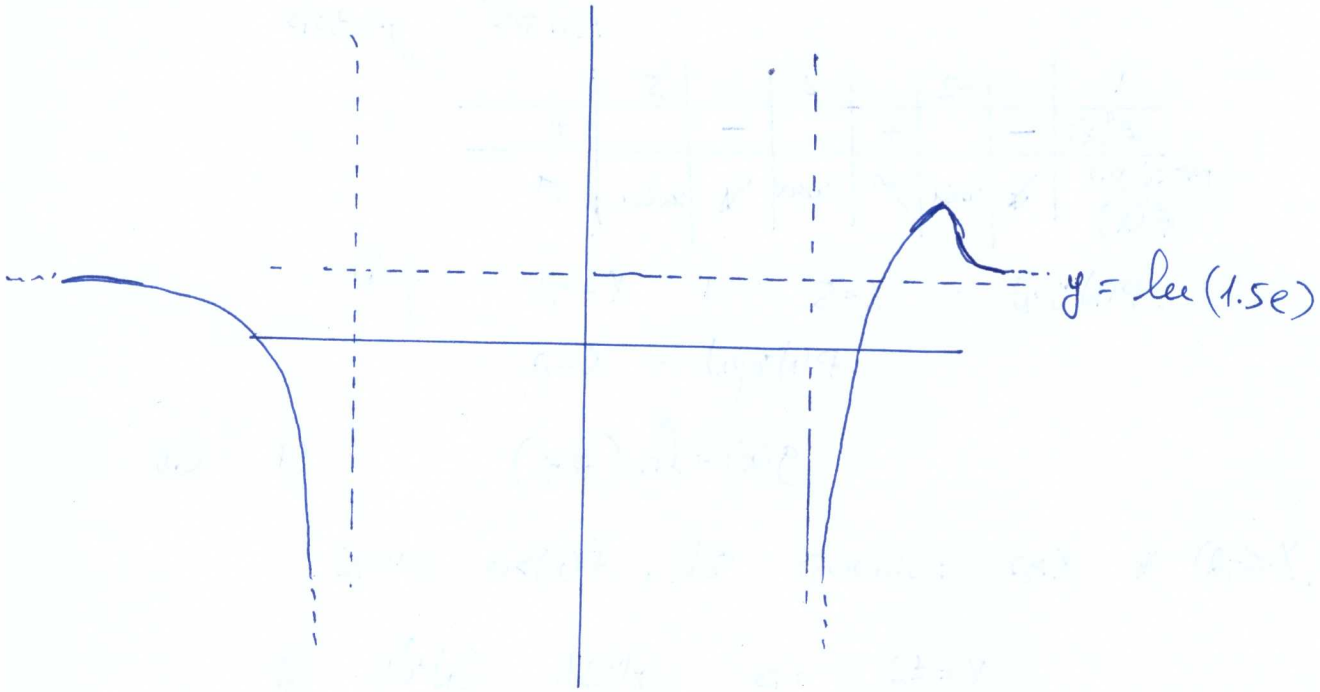
$g'(x<4)>0$
$g'(x>4)<0$

$$g(x=4) = \ln\left(f(x=4)\right) = \ln(3e) = 2.09$$

ולכן

מקסימום - $(4, 2.09)$.

(4



בגרות אונליין | SCHOOL ללמוד באינטרנט | וואלה